MAI 1 – řešení 7. domácího úkolu

Spojitost funkce:

(1.) $f, g : (-1,1) \to R$ – co lze říci o spojitosti v bodě $x=0$

a) $f+g$: (i) f, g jsou obě spojité v bodě 0 $\Rightarrow$ $f+g$ je spojitá v bodě 0 (aritmetika spojitosti)

(ii) f je spojitá v bodě 0, g není spojitá v bodě 0, pak $f+g$ není spojitá v bodě 0, neboť: kdyby $f+g$ byla spojitá v bodě 0, pak (AS) je také $(f+g)-f$ spojitá v bodě 0, tj. g je spojitá v bodě 0 – spor

(iii) f není spojitá v 0, g spojitá, pak $f+g$ není spojitá (dtto jako v (ii))

(iv) f není spojitá v 0, g není spojitá, pak o $f+g$ a spojitosti v 0 nelze nic říci – $f+g$ může být nespojitá ($\operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} x$) i spojitá, např. když $g=-f$, pak $f+g = f-f = 0$ v $(-1,1)$, tedy $f+g$ je spojitá v 0

b) $f \cdot g$: (i) f je spojitá v 0, g je spojitá v 0 $\Rightarrow$ $f \cdot g$ je spojitá v bodě 0 (aritmetika spojitosti)

(ii) v ostatních případech nelze nic říci o spojitosti fce $f \cdot g$ v 0 – $f \cdot g$ může být v 0 spojitá i nespojitá.

příklady:

f spojitá v 0, g nespojitá v 0 : $f(x)=1$ v $(-1,1)$ $\Rightarrow$ $f\cdot g = g$ není spojitá v 0

$f(x)=0$ v $(-1,1)$ $\Rightarrow$ $f\cdot g = 0$ – spojitá v 0

f není spojitá v 0, g není spojitá v 0 : $\operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} x$ – není spojitá $\left(= \begin{cases} 1, & x\in(-1,1)\setminus\{0\} \\ 0, & x=0 \end{cases} \right)$

ale např. $f(x) = \begin{cases} 0, & x\in(-1,0\rangle \\ 1, & x\in(0,1) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1, & x\in(-1,0\rangle \\ 0, & x\in(0,1) \end{cases}$,

pak $f(x)\cdot g(x) = 0$ v $(-1,1)$, tj. je spojitá v 0

② $|f(x)| \le x^2$ pro $\forall \in R \Rightarrow f(x)$ je spojitá v bodě 0.

1) $x=0$ $\quad f(0)=0 \quad (\,|f(0)|\le 0 \Rightarrow f(0)=0\,)$

2) stačí tedy ukázat, že $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ – užijeme VOS:

$0 \le |f(x)| \le x^2$ v R, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0 \overset{}{\underset{\text{VOS}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x\to 0}|f(x)| = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ (cbd)

③ $f(x), g(x)$ spojité v bodě $a\in R \Rightarrow$

(i) $|f(x)|$ je spojitá v bodě a :

ze definice, tj. $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |f(a)|$ (analogie z limit nebo "ze" "rovnic" (i v důkazu limity $|f(x)|$), že

$\big|\,|f(x)| - |f(a)|\,\big| \le |f(x) - f(a)|$ (viz naše 1. cvičení) nebo lze definici „obejít" takto:

$|f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ – a k důkazu spojitosti $|f(x)|$ v bodě a stačí věta o spojitosti složené funkce:

f je spojitá v bodě $a \Rightarrow f^2(x)$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$

$g(y) = \sqrt{y}$ je spojitá v $\langle 0, +\infty)$, tedy složená fce $\sqrt{f^2(x)} = |f(x)|$ je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$.)

(ii) $\max\{f(x), g(x)\}$ $(= \max\{f, g\}(x))$ i $\min\{f(x), g(x)\}$ $(= \min\{f, g\}(x))$ jsou funkce spojité v bodě a:

Snadno se toto ukáže pomocí následující „finty" – která se nehodí hodit –

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

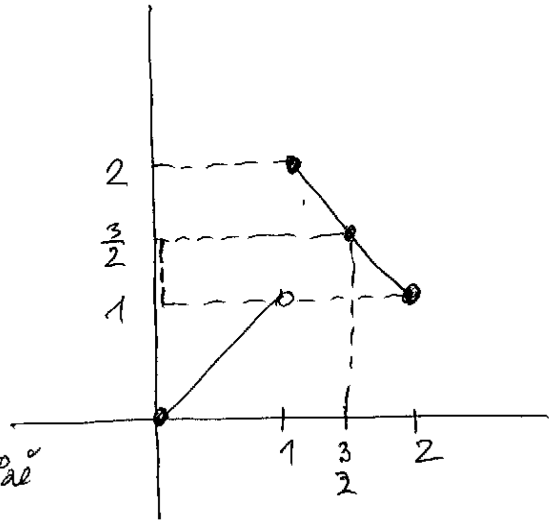
$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

Pak už je spojitost fcí $\max\{f(x), g(x)\}$ i $\min\{f(x), g(x)\}$ „zřejmá" – $f(x) + g(x)$ i $f(x) - g(x)$ jsou spojité v bodě a, tedy i $|f(x) - g(x)|$ je spojitá fce v bodě a a dále už jen uplatníme „aritmetiku" spojitosti.

4. Může fce nespojitá v (a, b) zobrazit interval (a, b) na interval?

Zde je spíše místo na Vaše nápady a hezké funkce od Vás – „vaši" příklad:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ 3-x, & x \in [1,2] \end{cases}$$



f není spojitá v $[0,2]$,
ale $f([0,2]) = [0,2]$,
tj. i nespojitá fce f zobrazit může interval na interval, tj:
pro každé $c \in [0,2]$ ex. $x \in [0,2]$: $f(x) = c$
Ale v intervalu $[0,\frac{3}{2}]$ už to neplatí!:
$f([0,\frac{3}{2}]) = [0,1) \cup [\frac{3}{2},2]$

Derivace funkce

(píšu i naznačení výpočtu derivací, a omlouvám se, pokud to nepotřebujete – což už předpokládám)

a) $$\left(\frac{x^3}{x^2-1}\right)' \underset{\left(\frac{f}{g}\right)'}{=} \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2},$$

$$Df = R \setminus \{-1,1\} = Df'$$

b) (*) $$\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}\right)' \underset{(f(g(x)))'}{=} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-2}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x+1}} \cdot \frac{-3}{(x-2)^2},$$

$$Df = \left\{ x \in R;\ \frac{x+1}{x-2} \geq 0,\ x \neq 2 \right\} = (-\infty,-1\rangle \cup (2,+\infty)$$

derivaci jsme v (*) spočítali v $(-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$ – ? $f'_-(-1)$?

$f'_-(-1)$: f je spojitá v bodě $x=-1$ zleva, tedy lze najít

$f'_-(-1) = \lim\limits_{x\to -1-} f'(x)$ (pokud tato limita existuje):

a $\lim\limits_{x\to -1-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1-} \underbrace{-\frac{3}{2}\frac{1}{(x-2)^2}}_{\to -\frac{1}{6}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}}_{\to +\infty \left(= \text{“}\frac{-3}{\cdot\, 0-}\text{”}\right)} \overset{=}{AL} -\infty$, tj.

$\underline{\mathcal{D}f' = (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)}$ (uvažujeme-li f' jako funkci s hodnotami v R)

c) $\underline{f(x) = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}}}$: $\underline{\mathcal{D}f = R \setminus \{-1,1\} = \mathcal{D}f'}$

$\underline{f'(x)} = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \frac{2x(x^2-1)-(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$

(derivace složené funkce)

$= e^{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \cdot \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$

d) $\underline{f(x) = \sqrt{x^2+1}\cdot \operatorname{arctg}(\sin 2x) \quad - \quad \mathcal{D}f = R = \mathcal{D}f'}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x \cdot \operatorname{arctg}(\sin 2x) + \sqrt{x^2+1}\, \frac{1}{1+\sin^2(2x)}\cdot \cos(2x)\cdot 2 =$

(derivace součinu a fcí složených)

$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \operatorname{arctg}(\sin 2x) + \frac{2\sqrt{x^2+1}\cdot \cos(2x)}{1+\sin^2(2x)}$

e) $\underline{f(x) = \cos\sqrt{x}, \quad \mathcal{D}f = \langle 0,+\infty)}$

$f'(x) = -\sin\sqrt{x}\,(\sqrt{x})' = -\frac{1}{2}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $x \in (0,+\infty)$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim \left(-\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}_{\to 1}\right) = -\frac{1}{2}$ $\Bigg\}$ $\underline{\mathcal{D}f' = \langle 0,+\infty)}$

(f je spojitá v $0+$) (VLSF + „takové“)

Ale pokud ještě nebyla známa věta „o dopočítávání" derivací pomocí limity derivace funkce (v bodě, kde je funkce spojitá!), tak lze i užít definici derivace:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos\sqrt{x}-1}{x} \underset{\substack{\text{VLSF}\\ \sqrt{x}=t\to 0+}}{=}$$

$$= \lim_{t\to 0+} \frac{\cos t - 1}{t^2} = -\frac{1}{2}$$ (naše známá limita, a i bez „l'Hospitala" umíme)

$$\left(= \lim_{t\to 0+} \frac{\cos^2 t - 1}{t^2}\cdot\frac{1}{\cos t+1} = \lim_{t\to 0+} \underbrace{\left(-\frac{1}{\cos t+1}\right)}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2 t}{t^2}}_{\to 1} \underset{AL}{=} -\frac{1}{2} \right)$$

f) $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ – příklad je podrobně „vyřešen" v písemném „cvičení" 8 (str. 1–3)

„Výpočet $f'_\pm(1)$ (i $f'_\pm(-1)$) je výrazně lepší užitím věty o limitě derivace", také lze z definice, ale pak asi „dále užitím l'H. pravidla)

2) Vyšetřete existenci a hodnotu derivace funkce

(i) $f(x) = |\ln x|$ v bodě $x=1$:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x\in(1,+\infty) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \text{ v } (1,+\infty) \\ -\ln x, & x\in(0,1\rangle \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x} \text{ v } (0,1) \end{cases}$$

a $f'_\pm(1) = \lim_{x\to 1\pm} f'(x) = \pm 1 \Rightarrow$ f nemá v bodě oboustrannou derivaci

(f je spojitá v $x=1$)

Pokud bychom počítali $f'_{\pm}(1)$ „jen" z definice:

$$f'_{+(-)}(1) = \lim_{x\to 1+(-)} \frac{+(-)\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1+(-)} +(-)\underbrace{\frac{\ln x}{x-1}}_{\to 1 \text{ („také")}} = \pm 1$$

ale $\underline{g(x) = |\ln^3 x|}$

$$g(x) = \begin{cases} \ln^3 x, & x \in (1,+\infty) \Rightarrow g'(x) = 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in (1,+\infty) \\ -\ln^3 x, & x \in (0,1\rangle \Rightarrow g'(x) = -3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}, \quad x \in (0,1) \end{cases}$$

a $$g'_{+(-)}(1) = \lim_{x\to 1+(-)} g'(x) = \lim_{x\to 1+(-)} +(-)\, \underbrace{3\ln^2 x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 1} = 0 \quad \text{AL},$$

tedy g má v bodě $x=1$ oboustrannou derivaci $g'(1)=0$

<u>A „obecněji":</u>

Pokud nějaké funkci f, $f(a)=0$, $f(x)>0$ v $(a, a+\delta)$ a $f(x)<0$ v $(a-\delta, a)$ (BÚNO),

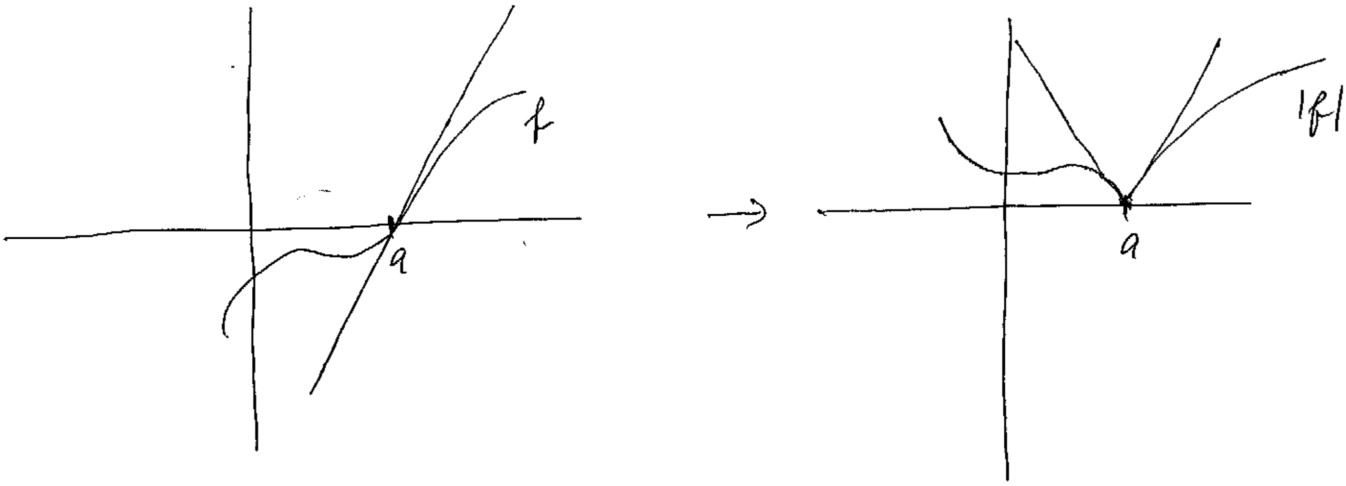
pak, <u>když $f'(a) \neq 0$</u>, $|f(x)|$ nemá v bodě $\underline{a}$ derivaci oboustrannou, a $|f|'_+(a) = f'(a)$, a $|f|'_-(a) = -f'(a)$)

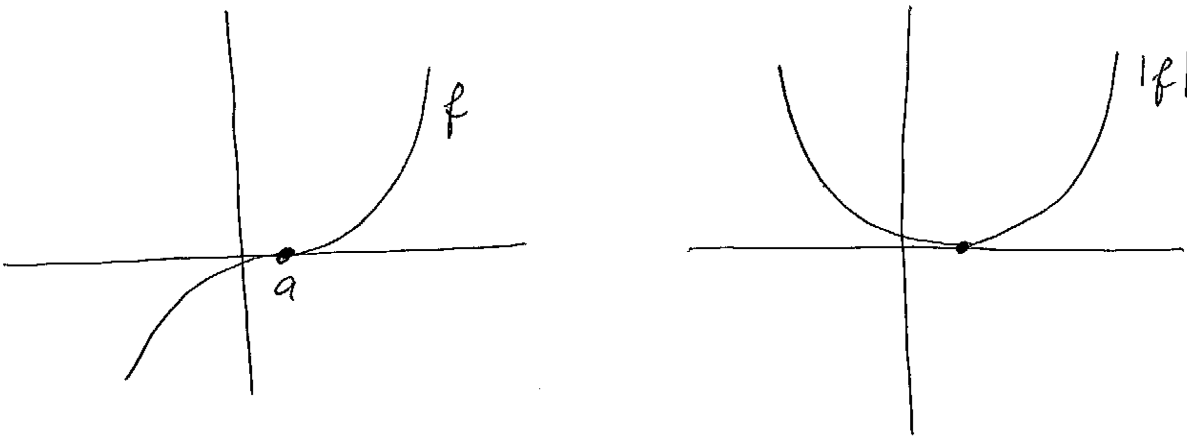
(analog. pro $f(x)<0$ v $(a, a+\delta)$ a $f(x)>0$ v $(a-\delta, a)$);

<u>když ale $f'(a)=0$, pak i $|f|'(a)=0$</u> :

$$|f|'(a) = \lim_{\substack{x\to a \\ (f(a)=0)}} \frac{|f(x)|}{x-a} = \lim_{x\to a} \underbrace{\frac{f(x)}{x-a}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\operatorname{sgn} f(x)}_{\text{omez.}} = 0 \;!$$

a „znázornění" na grafu:





(ii) Tedy teď už zřejmější co lze očekávat:

$$(\operatorname{arctg} x)'_{x=0} = \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|\operatorname{arctg} x|)'_{x=0\pm} = \pm 1$$

zatímco

$$(\operatorname{arctg}^3 x)'_{x=0} = 3 \operatorname{arctg}^2 x \cdot \frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{i } (|\operatorname{arctg}^3 x|)'_{x=0} = 0$$

a vyjádřil samozřejmě pohodlně :

$$\underline{f(x)=|\operatorname{arctg} x|} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \in \langle 0,+\infty) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}, x>0 \\ -\operatorname{arctg} x, & x\in(-\infty,0) \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{1+x^2}, x<0 \end{cases}$$

$$a \quad f'_{(\pm)}(0) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{(\pm)1}{1+x^2} = (\pm)1 \Rightarrow$$ <u>f nemá v $x=0$ oboustrannou derivaci</u>.

$$\underline{g(x)=|\operatorname{arctg}^3 x|} = \begin{cases} \operatorname{arctg}^3 x, & x\geq 0 \Rightarrow g'(x)=3\operatorname{arctg}^2 x\cdot\frac{1}{1+x^2}, x>0 \\ -\operatorname{arctg}^3 x, & x<0 \Rightarrow g'(x)=3\operatorname{arctg}^2 x\cdot\frac{-1}{1+x^2}, x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'_{\pm}(0) = \lim_{x\to 0\pm} g(x) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{-3}{1+x^2}\operatorname{arctg}^2 x = 0 \quad , \text{ tj. } \underline{g'(0)=0}$$

„$-3 \cdot 0$"

(A třeba si sami zkuste ukázat obecné tvrzení pro $f(a)\neq 0$)

3, a) $\underline{f(x) = x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right), x\neq 0, \ f(0)=0}$

(i) f je spojitá v $a=0 \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)=0$:

$$\lim_{x\to 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \text{„}0 \cdot \text{omezená"} \underset{\text{VOS}}{=} 0 \ , \text{ tj.}$$

<u>f je spojitá v bodě $a=0$.</u>

(ii) $f'(x) = 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{\text{VOS}}{=} 0$$

a je vidět (opět VOS), že i $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, tedy f' je spojitá v 0.
(takhle to plyne z věty o „dopočítávání derivace")

3b) (i) $f(x)=\sqrt{\operatorname{arctg}(x-1)^2}$

1) $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$: $\operatorname{arctg}(x-1)^2$ je def. v $\mathbb{R}$, a protože $(x-1)^2 \geqq 0$, je i $\operatorname{arctg}(x-1)^2 \geqq 0$ v $\mathbb{R}$, a tedy $\sqrt{\operatorname{arctg}(x-1)^2}$ je tedy definována pro $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $f'(x)$: zde je „nebezpečný" bod x, kde $\operatorname{arctg}(x-1)^2 = 0$, neboť $(\sqrt{x})'_{x=0+} = +\infty$!

Tedy počítejme (opatrně):

$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\operatorname{arctg}(x-1)^2}} \cdot \frac{1}{1+(x-1)^4} \cdot \cancel{2}(x-1)$$

pro $x \neq 1$!

„algebra" $f'(1)$ – můžeme-li na ní užít větu o „doplnění" derivace –

– f je spojitá v $\mathbb{R}$, tedy i v bodě $a=1$:

$$f'_{\pm}(1) = \lim_{x\to 1\pm} f'(x) = \lim_{x\to 1} \underbrace{\frac{1}{1+(x-1)^4}}_{\to 1} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{\operatorname{arctg}(x-1)^2}} = \pm 1$$

tedy ex. jen (díky (**) vidíme) $f'_{\pm}(1)$

stačí (díky AL) jen určit

(**) $$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x-1}{\sqrt{\operatorname{arctg}(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1\pm} \sqrt{\underbrace{\frac{(x-1)^2}{\operatorname{arctg}(x-1)^2}}_{\to 1\,(*)}} \cdot \operatorname{sgn}(x-1) = \pm 1$$

(*) užijeme $x-1 = |x-1| \operatorname{sgn}(x-1)$

$= \sqrt{(x-1)^2}\operatorname{sgn}(x-1)$, a potom rovnou využít $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$)

$f'_{\pm}(1)$ lze spočítat i z definice:

$$f'_{\pm}(1) = \lim_{x\to 1\pm} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}(x-1)^2} - 0}{x-1} \; -$$

– a to je vlastně „převrácená" limita (**) – vidíte, že věta o „dopočítávání" derivace je „technicky" někdy výhodnější, ale třeba zde ani ne.

(ii) $f(x) = \cos\sqrt{\dfrac{x}{1-x^2}}$:

$D_f = \{ x\in \mathbb{R};\ \frac{x}{1-x^2} \geqq 0 \wedge x \neq \pm 1 \} = (-\infty,-1) \cup \langle 0,1)$

$\left((x \geqq 0 \wedge x\in(-1,1)) \vee (x<0 \wedge x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)) \right)$

$f'(x)$: („nebezpečný" bod je $x=0+$ – díky $\sqrt{*}$)

$$f'(x) = -\sin\sqrt{\frac{x}{1-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}} \cdot \frac{1-x^2-x(-2x)}{(1-x^2)^2} =$$

$x \neq 0$!

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{\sin\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}} \cdot \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \quad \text{v } (-\infty,-1)\cup(0,1)$$

a $f'_{+}(0) = \lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+} -\frac{1}{2}\underbrace{\frac{\sin\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}}_{\to 1} \underset{AL}{=} -\frac{1}{2}$

(neboť f je spojitá v D_f, tj. i v bodě $0+$)

VLSF:

$y = \sqrt{\frac{x}{1-x^2}} \to 0$ pro $x\to 0$ a $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$